Talteori

Værktøjskasse

- Se på sidste ciffer.
- Primfaktoropløs, og se på hvilke primtal der indgår. Fx er primfaktoropløsningen af 60 lig med $2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Det er ofte en god idé at opfatte primtallene som byggestenene til de hele tal.
- Undersøg hvad der går op i et udtryk. Her er et par regler:
  - Hvis p og q er to forskellige primtal, så går $p \cdot q$ op i et tal, hvis de hver især går op. Fx går $6 = 2 \cdot 3$ op i et tal, hvis både 2 og 3 går op.
  - Hvis p er et primtal, og p går op i produktet $a \cdot b$, så går p op i enten a eller b.
  - Hvis n går op i to tal a og b, så går n også op i summen $a + b$ og i differensen $a - b$. Fx går 7 op i $7n + 21m$ da 7 går op i både $7n$ og $21m$.
- Omskriv til produkt, fx $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Når noget er skrevet som et produkt, kan du lettere se hvad der går op i tallet.

Eksempler

A. Se på sidste ciffer
Bestem sidste ciffer i 2^{444}.

Løsning Da $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ og $2^5 = 32$, kan vi se et system i sidste ciffer i $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$. Sidste ciffer er $2, 4, 8, 6, 2, \ldots$, og denne periode på fire vil gentage sig fordi sidste ciffer i et produkt kun afhænger af sidste ciffer i hver af faktorerne. Da 4 går op 444, må 2^{444} have samme sidste ciffer som 2^4, dvs. 6.

B. Primfatoropløs
Hvor mange nuller slutter tallet $14! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$ på?

Løsning Det er IKKE en god idé at gange det hele ud! Udnyt i stedet at antal nuller til slut svarer til hvilken potens af 10 der går op, dvs. at hvis 10 går op, er der et nul til slut, hvis 10^2 går op, er der to nuller til slut, osv. Hvis fx at 10^3 går op i et tal, mens 10^4 ikke går op, så slutter tallet på præcis tre nuller. For hvert 10-tal skal vi have et 2-tal og et 5-tal i primfaktoropløsningen. Hvis vi ser på primtallet 5, så går 5 op i både 5 og $10 = 2 \cdot 5$ (mens 5^2 ikke går op), og 5 går ikke op i andre tal fra 1 til 14. Derfor må potensen af 5 i primfaktoropløsningen være 5^2. Vi kan se at 2 går op i mange af tallene, faktisk er potensen af 2 i primfaktoropløsningen 2^{11}, men det vigtige er blot at den er mindst 2^2. Nu ved vi derfor at $2^2 \cdot 5^2 = 10^2$ går op, mens $10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ ikke går op. Tallet 14! slutter derfor på netop to nuller.
(Primfaktoropløsningen af 14! er $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$).

C. Undersøg hvad der går op i et udtryk
Lad n være et helt tal. Vis at 6 går op i $n(n+1)(n+2)$.

Løsning Igen skal vi IKKE gange parenteserne ud. Når vi skal vise at $6 = 2 \cdot 3$ går op i noget, så er det nok at vise at både 2 og 3 går op. Tallet $n(n+1)(n+2)$ er produktet af tre på hinanden følgende tal. Blandt tre på hinanden følgende tal, er der mindst et lige, derfor er produktet af tre på hinanden følgende tal lige, og 2 går derfor op i produktet. Blandt tre på hinanden følgende tal er der netop et hvor 3 går op, og derfor går 3 op i produktet af tre på hinanden følgende tal. Da både 2 og 3 går op i $n(n+1)(n+2)$, så må 6 også gå op.

D. Omskriv til produkt
Bestem alle positive hele tal x og y der opfylder ligningen

$$x^2 + 101 = y^2.$$

Løsning Det er ofte en god idé at omskrive til produkt, så derfor omskriver vi vha. kvadratsætningerne: $101 = y^2 - x^2 = (y + x)(y - x)$. Tallet 101 er et primtal, så den eneste måde at skrive 101 som et produkt af to positive hele tal er $101 \cdot 1$. Ligningen $101 = (x + y)(x - y)$ viser derfor at eneste mulighed er $y + x = 101$ og $y - x = 1$ da $y + x$ er større end $y - x$. Ved at lægge de to ligninger sammen fås $2y = 102$ og altså $y = 51$. Dermed er $x = 50$ og $y = 51$ eneste løsning.

E. Omskriv til produkt, og undersøg hvad der går op i et udtryk

Tallene a og b er hele tal hvor 11 går op i a^2+b^2+9ab. Vis at 11 også går op i a^2-b^2. (Georg Mohr-Konkurrencen 2004)

Løsning Vi skal vise at 11 går op i a^2-b^2. Det er meget nemmere at se hvad der går op, når man har et produkt, så derfor omskriver vi til produkt vha. kvadratsætningerne: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Hvis vi kan vise at 11 går op i $a+b$ eller i $a-b$, så har vi vist at 11 går op i a^2-b^2. Vi ved at 11 går op i a^2+b^2+9ab. Igen tænker vi i kvadratsætninger og omskriver

$$a^2+b^2+9ab=a^2+b^2-2ab+11ab=(a-b)^2+11ab.$$

Vi ved at 11 går op i summen $(a-b)^2+11ab$, og at 11 går op i sidste led $11ab$. Derfor må 11 også gå op i $(a-b)^2$. Da 11 er et primtal, betyder det at 11 også går op i $a-b$, og derfor i $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Opgaver

Opgave 1 Et produkt af fire forskellige positive hele tal er 2008. Hvad er summen af disse fire tal?

Opgave 2 Hvad er det mindste hele tal n så $\sqrt[3]{n\cdot 88}$ er et helt tal?

Opgave 3 Hvad er det sidste ciffer i 2007^{2007}?(Georg Mohr-Konkurrencen 2007)

Opgave 4 Tallet $\sqrt{2000^{2000}}$ er et tal som ender på mange nuller. Hvad er det sidste ciffer som ikke er et nul?

Opgave 5 Bestem alle positive hele tal n så $4n+1$ går op i $12n+13$.

Opgave 6 Findes der et positivt helt tal n så $n!$ har præcis 11 nuller til slut? (Med $n!$ betegnes tallet $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$).(Georg Mohr-Konkurrencen 2001)

Opgave 7 Om de tre hele tal p, q og r gælder at $p+q^2=r^2$. Vis at 6 går op i produktet pqr. (Georg Mohr-Konkurrencen 2008)

Opgave 8 To positive heltal har summen 2002. Kan 2002 gå op i deres produkt? (Georg Mohr-Konkurrencen 2002)

Opgave 9 Georg har til en fest købt masser af fyldte chokolader, og da han tæller hvor mange han har, opdager han at antallet er et primtal. Han fordeler så mange af chokoladerne som muligt på 60 fade med lige mange på hvert. Han konstaterer derefter at han har mere end ét stykke tilbage, og at antallet af tiloversblevne stykker ikke er et primtal. Hvor mange stykker chokolade har Georg til overs? (Georg Mohr-Konkurrencen 2009)

Løsningsskitser

Opgave 1 Vi primfaktoropløser: $2008 = 2^3 \cdot 251$. Den eneste måde at skrive 2008 som et produkt af fire forskellige positive hele tal er derfor $2008 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 251$. Disse fire tals sum er 258.

Opgave 2 Hvis vi skal finde et n så $\sqrt[3]{n \cdot 88} = \sqrt[3]{n \cdot 2^3 \cdot 11}$ er et helt tal, skal alle eksponenterne i primfaktoropløsningen af $n \cdot 2^3 \cdot 11$ være delelige med 3. Vi kan derfor se at $n = 11^2 = 121$ må være det mindste n så dette er tilfældet, da vi så får $n \cdot 2^3 \cdot 11 = 2^3 \cdot 11^3$, og altså $\sqrt[3]{n \cdot 2^3 \cdot 11} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 11^3} = 2 \cdot 11 = 22$.

Opgave 3 Sidste ciffer i 2007^{2007}, er det samme som sidste ciffer i 7^{2007} da sidste ciffer i et produkt kun afhænger af sidste ciffer i hver af faktorerne. Sidste ciffer i $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, \cdots$ er $7, 9, 3, 1, 7, \cdots$, og denne periode på fire vil gentage sig fordi $7^n = 7^{n-1} \cdot 7$, og sidste ciffer i et produkt kun afhænger af sidste ciffer i hver af faktorerne. Da $2007 = 501 \cdot 4 + 3$, er sidste ciffer i 2007^{2007} det samme som i 7^3, dvs. 3.

Opgave 4 Først omskriver vi:

$$N = \sqrt{2000^{2000}} = 2000^{1000} = 2^{1000} \cdot 1000^{1000} = 2^{1000} \cdot 10^{3000}.$$

Sidste ciffer i N som ikke er nul, er derfor sidste ciffer i 2^{1000}. Det følger af eksempel A at det er 6.

Opgave 5 Bemærk først at

$$\frac{12n+13}{4n+1} = 3 + \frac{10}{4n+1}.$$

Tallet $4n+1$ går altså op i $12n+13$ netop hvis $4n+1$ går op i 10. For $n=1$ går $4n+1=5$ op i 10. For $n=2$ går $4n+1=9$ ikke op i 10. For $n \geq 3$ er $4n+1 > 10$ og går derfor ikke op i 10. Det eneste n der opfylder betingelsen, er derfor $n=1$.

Opgave 6 Antallet af slutnuller svarer til den mindste af eksponenterne af henholdsvis 2 og 5 i primfaktoropløsningen af $n!$. Primfaktoropløsningen af 16! er $2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, dvs. at eksponenten af 2 allerede her er større end 11. Da eksponenterne af 2 og 5 i primfaktoropløsningen af $n!$ kun bliver større når n vokser, findes der et n så $n!$ slutter på præcis 11 nuller, netop hvis vi kan finde et n så eksponenten af 5 i primfaktoropløsningen af $n!$ er 11.

Tallet 49! ender på 10 nuller da 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45 hver bidrager med et 5-tal, og $25 = 5^2$ bidrager med to 5-taller til primfaktoropløsningen af 49!. Tallet 50! ender derimod på 12 nuller da $50 = 2 \cdot 5^2$ bidrager med yderligere to 5-taller til primfaktoropløsningen. Der findes derfor ikke et n så $n!$ ender på netop 11 nuller.

Opgave 7 Ligningen omformes til

$$p = r^2 - q^2 = (r+q)(r-q).$$

For at vise at $6 = 2 \cdot 3$ går op i produktet pqr, viser vi at både 2 og 3 går op.

Tallet 2 går op i produktet pqr hvis mindst et af tallene er lige. Hvis både r og q er ulige, bliver $r+q$ lige, og dermed vil $p = (r+q)(r-q)$ være lige. Derfor er mindst et af tallene p, q og r lige, og 2 går op i pqr.

Tallet 3 går op i produktet pqr netop hvis 3 går op i mindst et af tallene p, q og r. Antag at 3 hverken går op i q eller r. Når man dividerer dem med 3, har de derfor en rest på enten 1 eller 2. Hvis q og r har samme rest ved division med 3, går 3 op i $r-q$, og hvis de har forskellig rest ved division med 3, dvs. at den ene har rest 1 og den anden rest 2, da går 3 op i $r+q$. I begge tilfælde går 3 op i $p = (r+q)(r-q)$. Derfor må 3 gå op i mindst et af tallene p, q og r og altså også i deres produkt pqr. Samlet har vi vist at både 2 og 3 og dermed også 6 går op i pqr.

Opgave 8 Svaret er nej, og dette bevises indirekte ved at antage at det er muligt, og herefter vise at dette fører til en modstrid.

Antag at der for to positive hele tal a og b gælder at $a + b = 2002$, og at 2002 går op i $a \cdot b$. Da $a \cdot b = a(2002 - a) = 2002a - a^2$, og 2002 går op i både $a \cdot b$ og $2002a$, vil 2002 også gå op i a^2. Desuden er $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, dvs. at primtallene 2, 7, 11 og 13 vil gå op i a^2 og dermed også i a. Altså vil $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ også gå op i a, hvilket er umuligt da $a < 2002$.

Opgave 9 Kald antallet af fyldte chokolader for n, antallet af fyldte chokolader på et fad for m og det overskydende antal for r. Da er

$$n = 60 \cdot m + r = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m + r$$

hvor $1 < r < 60$. Da n er et primtal, og r ikke er det, må n være større end r . Hvis et af primtallene 2, 3 eller 5 går op i r, går det også op i summen $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m + r$ da det går op i begge led, men dette er umuligt da n er et primtal større end r. Primtallet 7 er derfor det mindst mulige primtal som går op i r. Hvis en af primfaktorerne i r er større end 7, er den mindst 11 da 11 er mindste primtal større end 7. I dette tilfælde bliver r større end 60 da r er et produkt af mindst to primtal, og $7 \cdot 11 > 60$. Dette kan ikke lade sig gøre, og derfor er 7 eneste primfaktor i r, og dermed $r = 7^2 = 49$ eneste mulighed. Der er altså 49 fyldte chokolader tilovers.